

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра проектирования технологических машин



Расчетно-графическая работа по дисциплине:
«Прикладная механика»

Работу выполнил:
Власовец Игорь Дмитриевич
Группа: ЗФ-808

Оценка: _____

Шифр: 133144606
Дата:

Преподаватель: Чусовитин Николай Анатольевич

Подпись:

Новосибирск 2021

Задача № 4

Для заданного стального бруса (рис. 4.1) требуется:

- 1) построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений δ ;
- 2) если зазор перекрывается, то раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений δ ;
- 3) если зазор не перекрывается, то определить усилие, которое необходимо приложить к сечению, чтобы зазор закрылся. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений δ ;
- 4) провести анализ и сделать заключение о влиянии зазора на распределение напряжения по сечению брусьев.

Принять: допустимое напряжение – $[\sigma]=160 \text{ МПа}$, модуль упругости – $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Исходные данные: $F_0=90 \text{ кН}$; $F_1=40 \text{ кН}$. Длины участков: $l_1=3,0 \text{ м}$; $l_2=1,5 \text{ м}$; $l_3=1,5 \text{ м}$. Площади поперечных сечений: $A_1=500 \text{ мм}^2$; $A_2=800 \text{ мм}^2$; $A_3=400 \text{ мм}^2$. Зазор $\Delta=1,0 \text{ мм}$.

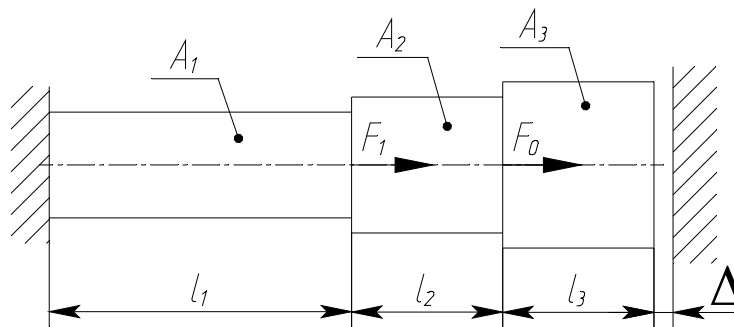


Рис. 4.1. Брус.

Решение:

1. Находим продольные силы N , нормальные напряжения σ и перемещения δ для статически определимого бруса. Для этого отбрасываем заделку правее зазора. Разбиваем брус на три силовых участка. Границами силовых участков являются: сечения приложения сосредоточенных нагрузок, сечения изменения профиля бруса, концевые сечения бруса. Порядок отсчета ведем от свободного конца бруса.

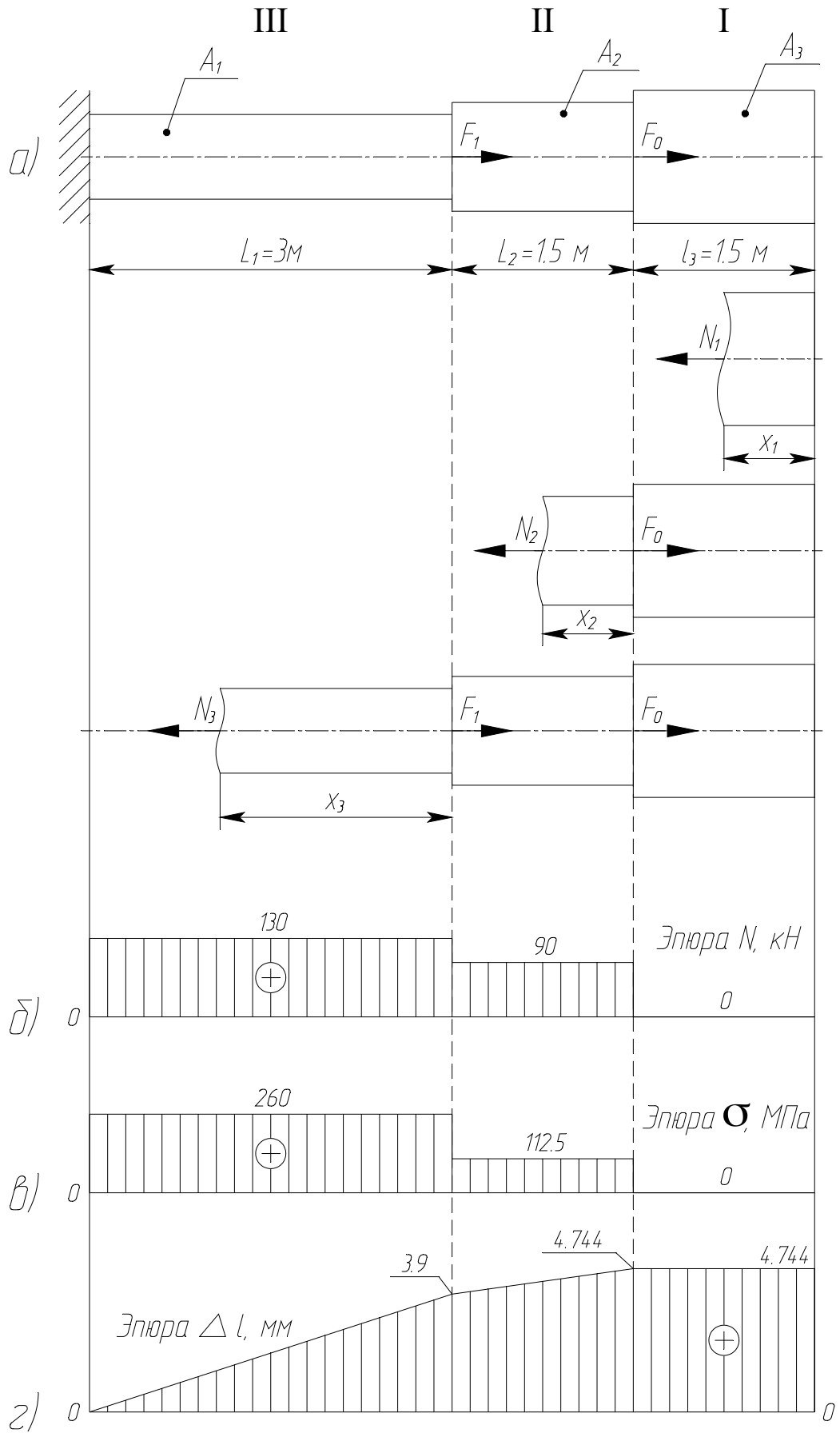


Рис. 4.2. Эпюры N , σ , Δl без учета зазора.

Для каждого силового участка находим закон изменения внутреннего силового фактора. Для этого берем произвольное сечение на расстоянии x от границы

силового участка и отбрасываем всю балку левее этого сечения, заменяя её действие силой реакции связи. За положительное направление силы реакции принимаем направление от сечения. Составляя уравнение статики, и решая его, находим значение внутреннего силового фактора.

На первом участке внешние силы отсутствуют и, очевидно, $N_1 = 0$.

Для второго участка: $\Sigma F_x = F_0 - N_2 = 0$, отсюда: $N_2 = F_0 = 90 \text{ кН}$.

Для третьего участка: $\Sigma F_x = F_1 + F_0 - N_3 = 0$, отсюда: $N_3 = F_1 + F_0 = 40 + 90 = 130 \text{ кН}$.

По полученным значениям строим эпюру N (рис. 4.2, б).

Находим напряжения на каждом силовом участке.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_3} = \frac{0}{400 \cdot 10^{-6}} = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{90 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} = 112,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 112,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{130 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^{-6}} = 260,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 260,0 \text{ МПа}.$$

Так как на каждом силовом участке внутренне усилие – величина постоянная, площадь постоянная, то и эпюра напряжений на каждом силовом участке ограничена прямой, параллельной нулевой линии (рис. 4.2, в).

Построение эпюры перемещений начинаем с левого конца бруса, который жестко заземлён, и, следовательно, перемещение его равно нулю. Построение эпюры перемещений ведем слева направо.

В произвольном сечении третьего силового участка на расстоянии x_3 от заделки абсолютное удлинение равно:

$$\Delta l_{3x} = \frac{N_3 \cdot x_3}{E \cdot A_1},$$

где $0 \leq x_3 \leq l_1$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ - модуль упругости первого рода.

Как видно из формулы, Δl меняется по линейному закону, и для построения эпюры на силовом участке достаточно найти две точки на границах силового участка. При $x_3 = 0$; $\Delta l_3 = 0$.

$$\text{При } x_3 = l_1; \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 3,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 3,900 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,900 \text{ мм}.$$

На втором силовом участке в произвольном сечении x_2 абсолютное удлинение будет равно алгебраической сумме перемещений третьего участка ($\delta_3 = \Delta l_3$) и удлинения, приобретенного на втором участке за счет внутреннего усилия N_2 , т.е.

$$\Delta l_{2x} = \delta_3 + \Delta l_{x_2}$$

или

$$\Delta l_{2x} = \delta_3 + \frac{N_2 \cdot x_2}{E \cdot A_2}, \quad \text{где } 0 \leq x_2 \leq l_2.$$

Подставляя соответствующие значения величин, получим при $x_2 = 0$ $\delta_2 = \delta_3$ и при $x_2 = l_2$

$$\delta_2 = \delta_3 + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = 3,900 \cdot 10^{-3} + \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 800 \cdot 10^{-6}} = (3,900 + 0,844) \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4,744 \text{ мм}.$$

На первом силовом участке $\Delta l = 0$ так как $N_1 = 0$, следовательно:

$$\delta_1 = \delta_2 = 4,744 \text{ мм}.$$

По полученным данным строим эпюру перемещений (рис. 4.2, г).

Таким образом, из построенных эпюр видно, что при заданной геометрии бруса и под действием приложенных нагрузок крайнее правое сечение переместилось бы на 4,744 мм, если бы не было отброшенной правой заделки, а на третьем силовом участке возникли бы напряжения больше допускаемых, что может привести к разрушению бруса.

Выше было указано, что под действием приложенных нагрузок зазор перекрывается и схема примет вид, показанный на рис. 4.3.

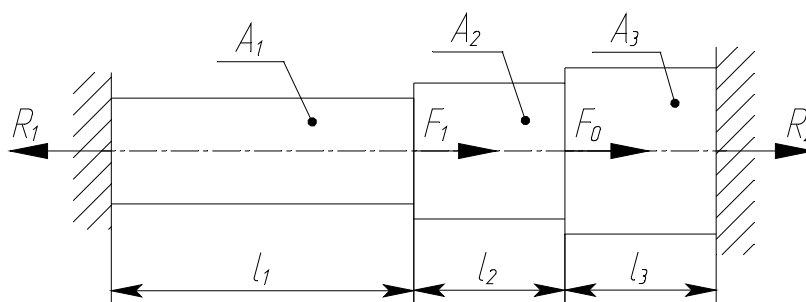


Рис. 4.3. Брус с перекрытым зазором.

Проведем исследование равновесия для такой схемы бруса:

$$\Sigma F_x = -R_1 + F_1 + F_0 + R_2 = 0.$$

2. Для построения эпюр внутренних усилий необходимо определить реакции связей. Освобождаем брус от связей и заменяем их действие реакциями R_1 и R_2 (рис.

4.3). Для такой системы сил статика дает одно уравнение. В этом уравнении два неизвестных R_1 и R_2 , следовательно, задача один раз статически неопределима.

Чтобы раскрыть статическую неопределимость, воспользуемся методом деформаций. Итак, если бы не было правой заделки, то правый свободный конец бруса переместился бы на величину $\Delta l_p = 4,744 \text{ мм}$, которая больше величины зазора. Однако как только зазор будет перекрыт, со стороны заделки на брус начнет действовать усилие R_2 , которое деформирует балку и «возвращает» крайнее правое сечение бруса до границы заделки (рис. 4.4).

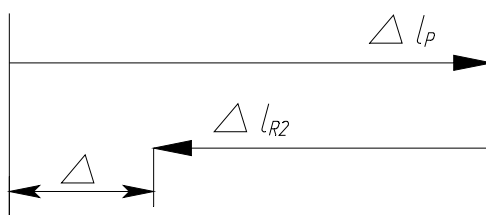


Рис. 4.4. Схема деформаций.

Из картины деформаций видно, что $\Delta l_p - \Delta l_{R_2} = \Delta$. Это и есть второе уравнение, необходимое для раскрытия статической неопределимости. Учитывая, Δl_p уже определено, а $\Delta l_{R_2} = \frac{R_2 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{R_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{R_2 \cdot l_3}{E \cdot A_3}$ получим:

$$\Delta l_p - \frac{R_2}{E} \cdot \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} \right) = \Delta.$$

Решая относительно R_2 , находим:

$$R_2 = \frac{E \cdot (\Delta l_p - \Delta)}{\left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} \right)} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot (4,744 - 1,0) \cdot 10^{-3}}{\left(\frac{3}{500} + \frac{1,5}{800} + \frac{1,5}{400} \right) \cdot 10^6} = 64,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 64,4 \text{ кН}.$$

Разбиваем брус на четыре силовых участка и находим продольные силы на каждом участке. Отсчет начинаем с правого конца бруса.

Для первого участка: $\Sigma F_x = -R_2 - N_1 = 0$, отсюда $N_1 = -R_2 = -64,4 \text{ кН}$.

Для второго участка: $\Sigma F_x = F_0 - R_2 - N_2 = 0$, отсюда: $N_2 = F_0 - R_2 = 90 - 64,4 = 25,6 \text{ кН}$.

Для третьего участка: $\Sigma F_x = F_1 + F_0 - R_2 - N_3 = 0$, отсюда:

$$N_3 = F_1 + F_0 - R_2 = 40 + 90 - 64,4 = 65,6 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру N (рис. 4.5, б).

Находим напряжения на каждом силовом участке.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_3} = \frac{-64,4 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^{-6}} = -161,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = -161,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{25,6 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} = 32,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 32,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{65,6 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^{-6}} = 131,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 131,2 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру σ (рис. 4.5, в).

Построение эпюры перемещений начинаем с левого конца бруса, который жестко заземлён, и, следовательно, перемещение его равно нулю. Построение эпюры перемещений ведем слева направо.

Для третьего силового участка на расстоянии x_3 от заделки абсолютное удлинение равно:

$$\Delta l_{3x} = \frac{N_3 \cdot x_3}{E \cdot A_1}, \quad \text{где } 0 \leq x_3 \leq l_1.$$

При $x_3 = 0$; $\Delta l_3 = 0$.

$$\text{При } x_3 = l_1; \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{65,6 \cdot 10^3 \cdot 3,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 1,968 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,968 \text{ мм}.$$

Для второго силового участка абсолютное удлинение равно:

$$\Delta l_{2x} = \Delta l_3 + \frac{N_2 \cdot x_2}{E \cdot A_2}, \quad \text{где } 0 \leq x_2 \leq l_2.$$

При $x_2 = 0$; $\Delta l_2 = \Delta l_3 = 1,968 \text{ мм}$.

При $x_2 = l_2$;

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = 1,968 \cdot 10^{-3} + \frac{25,6 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 800 \cdot 10^{-6}} = (1,968 + 0,240) \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,208 \text{ мм}.$$

Для первого силового участка абсолютное удлинение равно:

$$\Delta l_{1x} = \Delta l_2 + \frac{N_1 \cdot x_1}{E \cdot A_3}, \quad \text{где } 0 \leq x_1 \leq l_3.$$

При $x_1 = 0$; $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2,208 \text{ мм}$.

При $x_1 = l_3$;

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 + \frac{N_1 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = 2,208 \cdot 10^{-3} + \frac{-64,4 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = (2,208 - 1,208) \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,000 \text{ мм}.$$

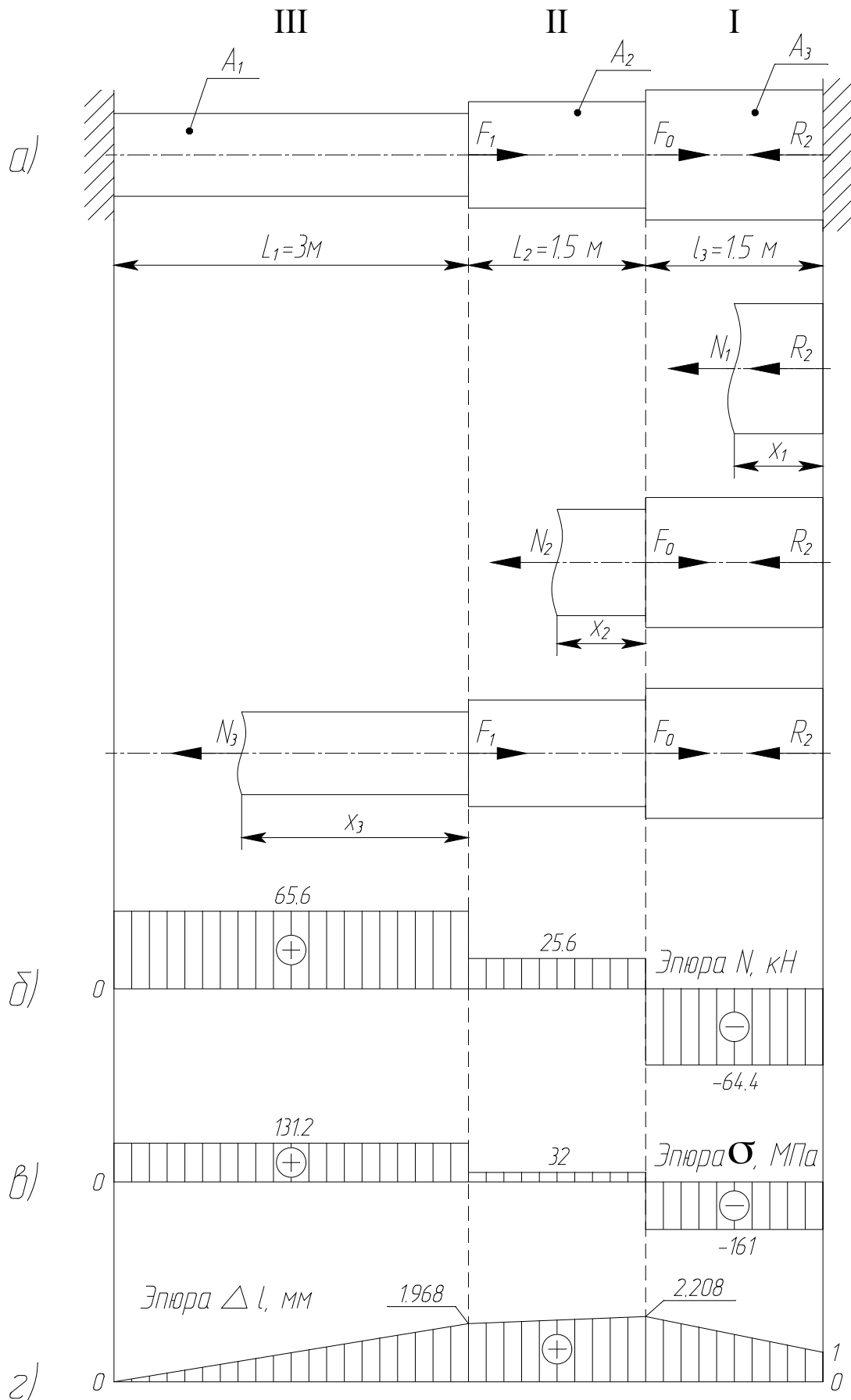


Рис. 4.5. Эпюры N , σ , Δl с учетом зазора.

То есть перемещение левого конца бруса равно величине зазора. По полученным значениям строим эпюру Δl (рис. 4.5, г).

3. Анализируя полученные результаты, видим, наличие правой заделки при существующем зазоре в 1,0 мм дало возможность понизить рабочее напряжение на третьем участке, и перераспределить его на другие участки. Таким образом, меняя величину зазора, можно регулировать и значение внутренних усилий, возникающих в сечениях бруса под действием приложенных нагрузок.

Правильность решения задачи можно проверить по эпюре деформаций. Равенство перемещения правого сечения бруса величине зазора говорит об этом.

Задача № 7

На стальной ступенчатый брус круглого поперечного сечения, закрепленного с двух сторон, действуют скручивающие моменты сил.

1. Определить диаметры стержня из условия прочности и условия жесткости.
2. Построить эпюры крутящих моментов и абсолютных углов закручивания при принятых диаметрах ступеней стержня.
3. Определить рабочие максимальные касательные напряжения и сравнить с допускаемыми касательными напряжениями.
4. Определить действительный относительный угол закручивания и сравнить с допускаемым относительным углом закручивания.

Исходные данные: $l_1 = 0,2 \text{ м}$; $l_2 = 0,2 \text{ м}$; $l_3 = 0,3 \text{ м}$ $T_1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $T_2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Соотношение диаметров: $\frac{d_1}{d_2} = 0,7$. $[\tau] = 30 \text{ МПа}$; $[\Theta] = 0,30 \text{ град/м}$.

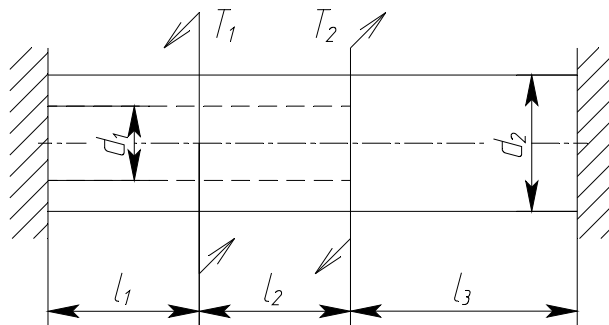


Рис. 7.1. Исходная схема.

Решение:

1. Освобождаем стержень от связей, которыми являются заделки с двух сторон, и заменяем действие связей силами реакций. Учитывая, что стержень невесомый и на него действуют только скручивающие моменты T_1 , T_2 , заключаем, что в заделках возникают крутящие моменты M_1 , M_2 . Полученная схема стержня представлена на рис. 7.2.

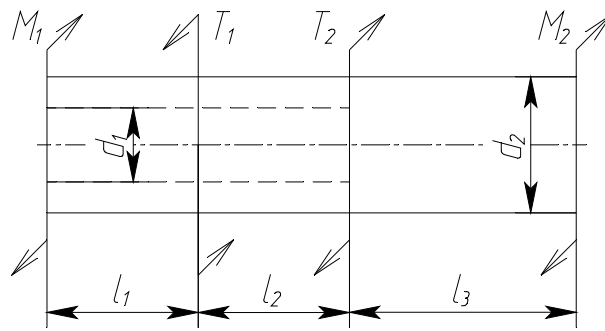


Рис. 7.2. Расчетная схема.

Для определения неизвестных моментов связей составляем уравнение статики. Для такой системы сил статика позволяет записать только одно уравнение равновесия:

$$\sum M_x = M_1 - T_1 + T_2 + M_2 = 0.$$

Проводя анализ, видим, что при одном уравнении статики имеем два неизвестных M_1 , M_2 , следовательно, задача является статически неопределимой.

Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся методом деформации применительно к кручению. Освободим, например, только правую заделку стального ступенчатого бруса и заменим её действие моментом связи M_2 . Проведем в сечении какой-либо радиус ρ (рис. 7.3). Применим принцип независимости действия сил. Тогда под действием скручивающих моментов T_1 и T_2 радиус ρ повернется на какой-то угол $\Delta\varphi_T$, а под действие реактивного момента M_2 этот же радиус повернется на угол $\Delta\varphi_{M_2}$. Но так как в действительности сечение неподвижно, то очевидно, алгебраическая сумма этих перемещений равна нулю, т.е.

$$\Delta\varphi_T + \Delta\varphi_{M_2} = 0.$$

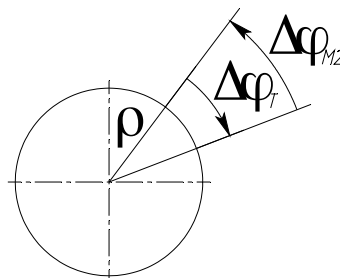


Рис. 7.3.

Это и будет являться уравнением деформации при кручении и вторым уравнением, необходимым для раскрытия статической неопределимости.

Найдем абсолютные углы закручивания:

$$\Delta\varphi_T = -\frac{T_1 \cdot l_1}{I_{\rho 1} \cdot G} + \frac{T_2 \cdot (l_1 + l_2)}{I_{\rho 1} \cdot G},$$

где $I_{\rho 1} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4)$ - полярный момент инерции кольцевого сечения вала на участках длиной l_1 и l_2 $\left(\alpha = \frac{d_1}{d_2} = 0,7\right)$;

$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ - модуль упругости второго рода.

$$\Delta\varphi_{M_2} = \frac{M_2 \cdot (l_1 + l_2)}{I_{\rho 1} \cdot G} + \frac{M_2 \cdot l_3}{I_{\rho 2} \cdot G},$$

где $I_{\rho 2} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32}$ - полярный момент инерции сплошного сечения вала на участке l_3 .

Тогда:

$$-\frac{T_1 \cdot l_1}{I_{\rho 1} \cdot G} + \frac{T_2 \cdot (l_1 + l_2)}{I_{\rho 1} \cdot G} = -\frac{M_2 \cdot (l_1 + l_2)}{I_{\rho 1} \cdot G} - \frac{M_2 \cdot l_3}{I_{\rho 2} \cdot G}.$$

Учитывая, что $\alpha = \frac{d_1}{d_2} = 0,7$ находим: $I_{\rho 1} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} \cdot (1 - 0,7^4) = 0,7599 \cdot I_{\rho 2}$.

$$\frac{T_1 \cdot l_1}{0,7599 \cdot I_{\rho 2} \cdot G} - \frac{T_2 \cdot (l_1 + l_2)}{0,7599 \cdot I_{\rho 2} \cdot G} = \frac{M_2 \cdot (l_1 + l_2)}{0,7599 \cdot I_{\rho 2} \cdot G} + \frac{M_2 \cdot l_3}{I_{\rho 2} \cdot G},$$

$$T_1 \cdot l_1 - T_2 \cdot (l_1 + l_2) = M_2 \cdot (l_1 + l_2) + 0,7599 \cdot M_2 \cdot l_3;$$

$$M_2 = \frac{T_1 \cdot l_1 - T_2 \cdot (l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2) + 0,7599 \cdot l_3};$$

$$M_2 = \frac{6 \cdot 0,2 - 2 \cdot (0,2 + 0,2)}{(0,2 + 0,2) + 0,7599 \cdot 0,3} = 0,637 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Зная величину крутящего момента, можем рассматривать брус как консольную балку и, не определяя реакции во второй заделке, найти опасное сечение, т.е. сечение, в котором возникают максимальные внутренние силовые факторы.

Строим эпюру $M_{кр}$. Зная внешние моменты и используя метод сечений, определяем крутящие (внутренние) моменты. Идем справа налево:

$$M_{кр3} = M_2 = 0,637 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр2} = M_2 + T_2 = 0,637 + 2 = 2,637 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр1} = M_2 + T_2 - T_1 = 0,637 + 2 - 6 = -3,363 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 7.4, б).

Из построенной эпюры крутящих моментов видно, максимальный момент действует на первом силовом участке, но возможно, что опасное сечение, с точки зрения прочности может оказаться на третьем силовом участке, так как полярный момент сопротивления сечения первого участка отличается от полярного момента сопротивления третьего участка. Найдем отношение касательного напряжения на первом участке τ_1 к касательному напряжению на третьем участке τ_3 . Если это отношение окажется больше единицы, то опасным сечением будет являться сечение на первом участке и наоборот.

$$\frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{16 \cdot M_{кр1}}{\pi \cdot d_2^3 \cdot (1 - \alpha^4)} \cdot \frac{\pi \cdot d_2^3}{16 \cdot M_{кр3}} = \frac{M_{кр1}}{M_{кр3} \cdot (1 - \alpha^4)} = \frac{3,363}{0,637 \cdot 0,7599} = 6,95 > 1.$$

Для выявления опасного сечения, с точки зрения условия жесткости, находим отношение абсолютных углов закручивания на соответствующих участках:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \frac{32 \cdot M_{кр1} \cdot l_1}{G \cdot \pi \cdot d_2^4 \cdot (1 - \alpha^4)} \cdot \frac{G \cdot \pi \cdot d_2^4}{32 \cdot M_{кр3} \cdot l_3} = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{M_{кр3} \cdot l_3 \cdot (1 - \alpha^4)} = \frac{3,363 \cdot 0,2}{0,637 \cdot 0,3 \cdot 0,7599} = 4,63 > 1.$$

Следовательно, опасное сечение по условию прочности и жесткости находится на первом участке. Определяем диаметр первой ступени из условия прочности:

$$\tau_{раб.макс} = \frac{M_{кр.макс}}{W_\rho} \leq [\tau],$$

где $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4)$ - полярный момент сопротивления кольцевого сечения.

Тогда

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр.макс} \cdot 16}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{3,363 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 0,7599}} = \sqrt[3]{751,31 \cdot 10^{-6}} = 9,09 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 90,9 \text{ мм}.$$

Определяем диаметр первой ступени из условия жесткости:

$$\Theta_{раб.макс} = \frac{M_{кр.макс}}{G \cdot I_\rho} \leq [\Theta],$$

где $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4)$ - полярный момент инерции кольцевого сечения;

$$[\Theta] = 0,30 \text{ град/м} = \frac{0,30 \cdot \pi}{180} = 5,236 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Тогда

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{M_{кр.макс} \cdot 32}{\pi \cdot G \cdot [\Theta] \cdot (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{3,363 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 5,236 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7599}} = \sqrt[4]{1,07617 \cdot 10^{-4}} = 1,019 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 101,9 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_2 = 105 \text{ мм}$, тогда $d_1 = 0,7 \cdot 105 = 73,5 \text{ мм}$.

2. Определив размеры сечений бруса, строим эпюры максимальных касательных напряжений и абсолютных углов закручивания (рис. 7.4, в, г).

На первом участке:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр1}}{W_{\rho1}} = \frac{16 \cdot (-3,363 \cdot 10^3)}{\pi \cdot (105 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (1 - 0,7^4)} = -19,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -19,5 \text{ МПа};$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G \cdot I_{\rho1}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{32 \cdot (-3,363 \cdot 10^3) \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (105 \cdot 10^{-3})^4 \cdot (1 - 0,7^4)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0,053^\circ.$$

На втором участке:

$$\tau_2 = \frac{M_{кр2}}{W_{\rho2}} = \frac{16 \cdot 2,637 \cdot 10^3}{\pi \cdot (105 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (1 - 0,7^4)} = 15,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15,3 \text{ МПа};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{кр2} \cdot l_2}{G \cdot I_{\rho2}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{32 \cdot 2,637 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (105 \cdot 10^{-3})^4 \cdot (1 - 0,7^4)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,042^\circ.$$

На третьем участке:

$$\tau_3 = \frac{M_{кр3}}{W_{\rho2}} = \frac{16 \cdot 0,637 \cdot 10^3}{\pi \cdot (105 \cdot 10^{-3})^3} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,8 \text{ МПа};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{кр3} \cdot l_3}{G \cdot I_{\rho2}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{32 \cdot 0,637 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (105 \cdot 10^{-3})^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,011^\circ.$$

Проверяем угол закручивания на правом конце балки:

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -0,053 + 0,042 + 0,011 = 0^\circ.$$

Угол закручивания правого конца балки равен нулю, следовательно, задача решена правильно.

3. Сравниваем максимальное касательное напряжение с допусковым касательным напряжением:

$$\tau_{раб.макс} = 19,5 \text{ МПа} < [\tau] = 30 \text{ МПа}.$$

4. Определяем рабочий максимальный относительный угол закручивания и сравниваем его с допусковым.

$$\Theta_{\text{раб.мах}} = \frac{\varphi_{T_2}}{l_2} = \frac{0,053}{0,2} = 0,265 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\Theta] = 0,30 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

На всех участках стержня выполняются как условия прочности, так и условие жесткости. Значительно меньшее рабочее касательное напряжение получилось вследствие того, что окончательные размеры сечений были приняты из расчета на жесткость.

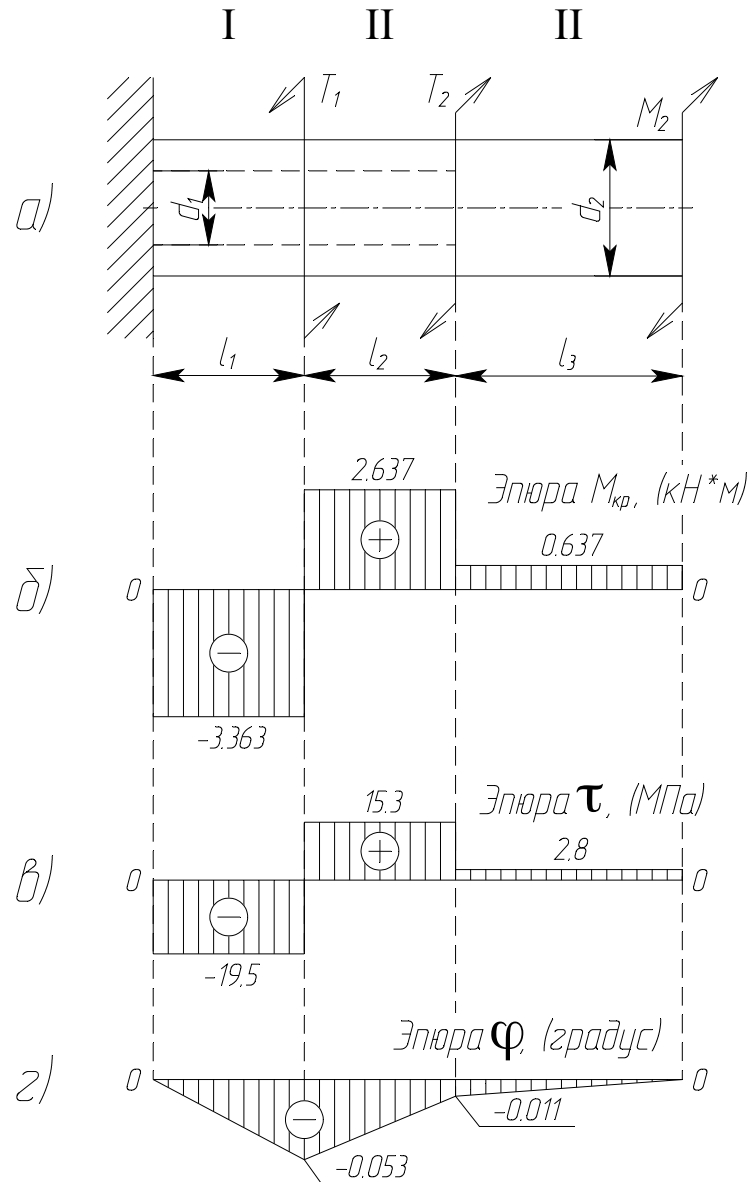


Рис. 7.4. Эпюры.

Задача № 8

Для заданной балки (рис.8.1) по исходным данным требуется:

- 1) построить расчетную схему балки в выбранном масштабе;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 3) из условия прочности при изгибе определить номер профиля двутавровой балки в соответствии с ГОСТ 8239-89, приняв допускаемое нормальное напряжение равным $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.
- 4) построить эпюру перемещений сечений балки.

Исходные данные: $l = 8,0 \text{ м}$, $a = 1,0 \text{ м}$, $b = 4,0 \text{ м}$, $c = 5,0 \text{ м}$, $F = 10 \text{ кН}$, $q = 40 \text{ кН/м}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

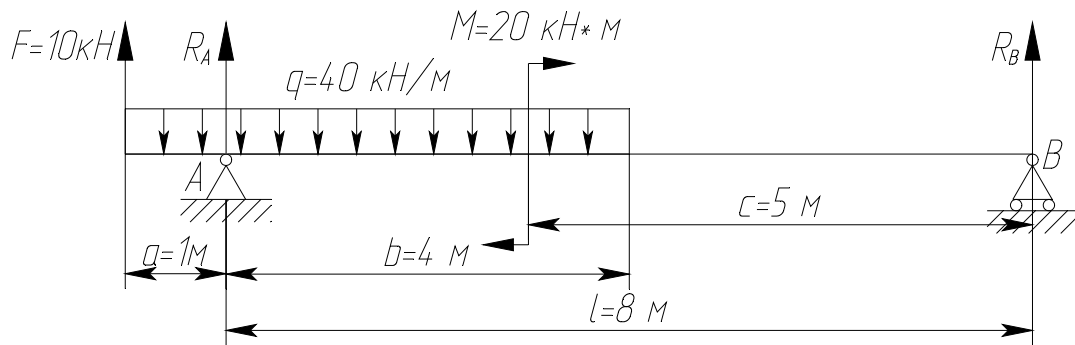


Рис. 8.1. Двухопорная балка.

Решение:

1. Освобождаем балку от связей и заменяем действие связей силами реакций R_A и R_B . На балку действует плоская параллельная система сил, для которой необходимо и достаточно составить два уравнения статики. Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_A(F_i) = R_B \cdot l - F \cdot a - M + q \cdot \frac{a^2}{2} - q \cdot \frac{b^2}{2} = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_B(F_i) = F \cdot (a+l) + R_A \cdot l + M - q \cdot (a+b) \cdot \left(l + a - \frac{a+b}{2} \right) = 0; \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим:

$$R_B = \frac{F \cdot a + M - q \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right)}{l} = \frac{10 \cdot 1 + 20 - 40 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{4^2}{2} \right)}{8,0} = 41,25 \text{ кН}$$

Из уравнения (2) находим:

$$R_A = \frac{q \cdot (a+b) \cdot \left(l - \frac{b-a}{2} \right) - F \cdot (a+l) - M}{l} = \frac{40 \cdot 5 \cdot \left(8 - \frac{4-1}{2} \right) - 10 \cdot 9 - 20}{8,0} = 148,75 \text{ кН} \cdot$$

Проверка: $\sum F_y = R_A + R_B + F - q \cdot (a+b) = 148,75 + 41,25 + 10 - 40 \cdot (1+4) = 0.$

Следовательно, реакции связей определены верно.

2. Разбиваем балку на силовые участки.

Анализ внутренних силовых факторов:

На первом участке $0 \leq z_1 \leq 1,0 \text{ м}$:

$$Q_y = F - q \cdot z_1; \quad Q_{(0)} = 10 - 40 \cdot 0 = 10,0 \text{ кН}, \quad Q_{(1,0)} = 10 - 40 \cdot 1,0 = -30,0 \text{ кН}.$$

$$M_x = F \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2}; \quad M_{(0)} = 10 \cdot 0 - 40 \cdot \frac{0^2}{2} = 0, \quad M_{(1,0)} = 10 \cdot 1,0 - 40 \cdot \frac{1,0^2}{2} = -10,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_x на первом участке представляет собой параболу, находим значение эпюры в точке максимума, где $Q_y = F - q \cdot z_k = 0$, т.е. $z_k = \frac{F}{q} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ м}$:

$$M_{(0,25)} = 10 \cdot 0,25 - 40 \cdot \frac{0,25^2}{2} = 1,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На втором участке $0 \leq z_2 \leq 3,0 \text{ м}$:

$$Q_y = F + R_A - q \cdot (a + z_2); \quad Q_{(0)} = 10 + 148,75 - 40 \cdot (1,0 + 0) = 118,75 \text{ кН},$$

$$Q_{(3,0)} = 10 + 148,75 - 40 \cdot (1,0 + 3,0) = -1,25 \text{ кН}.$$

$$M_x = F \cdot (a + z_2) + R_A \cdot z_2 - q \cdot \frac{(a + z_2)^2}{2}; \quad M_{(0)} = 10 \cdot (1,0 + 0) + 148,75 \cdot 0 - 40 \cdot \frac{(1,0 + 0)^2}{2} = -10,0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{(3,0)} = 10 \cdot (1,0 + 3,0) + 148,75 \cdot 3,0 - 40 \cdot \frac{(1,0 + 3,0)^2}{2} = 166,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_x на втором участке представляет собой параболу, находим значение эпюры в точке максимума, где $Q_y = F + R_A - q \cdot (a + z_m) = 0$, т.е.

$$z_m = \frac{F + R_A}{q} - a = \frac{10 + 148,75}{40} - 1,0 = 2,97 \text{ м};$$

$$M_{(2,97)} = 10 \cdot (1,0 + 2,97) + 148,75 \cdot 2,97 - 40 \cdot \frac{(1,0 + 2,97)^2}{2} = 166,27 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

На третьем участке $0 \leq z_3 \leq 1,0 \text{ м}$:

$$Q_y = F + R_A - q \cdot (a + l - c + z_3); \quad Q_{(0)} = 10 + 148,75 - 40 \cdot (1,0 + 8,0 - 5,0 + 0) = -1,25 \text{ кН},$$

$$Q_{(1,0)} = 10 + 148,75 - 40 \cdot (1,0 + 8,0 - 5,0 + 1,0) = -41,25 \text{ кН}.$$

$$M_x = F \cdot (a + l - c + z_3) + R_A \cdot (l - c + z_3) - q \cdot \frac{(a + l - c + z_3)^2}{2} + M;$$

$$M_{(0)} = 10 \cdot (4,0 + 0) + 148,75 \cdot (3,0 + 0) - 40 \cdot \frac{(4,0 + 0)^2}{2} + 20,0 = 168,25 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{(1,0)} = 10 \cdot (4,0 + 1,0) + 148,75 \cdot (3,0 + 1,0) - 40 \cdot \frac{(4,0 + 1,0)^2}{2} + 20,0 = 165,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_x на втором участке представляет собой параболу, находим значение эпюры в середине участка:

$$M_{(0,5)} = 10 \cdot (4,0 + 0,5) + 148,75 \cdot (3,0 + 0,5) - 40 \cdot \frac{(4,0 + 0,5)^2}{2} + 20,0 = 180,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

На четвертом участке $0 \leq z_4 \leq 4,0 \text{ м}$:

$$Q_y = -R_B; \quad Q_{(0)} = -41,25 \text{ кН}, \quad Q_{(4,0)} = -41,25 \text{ кН}.$$

$$M_x = R_B \cdot z_4; \quad M_{(0)} = 41,25 \cdot 0 = 0, \quad M_{(4,0)} = 41,25 \cdot 4,0 = 165,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 8.2, б, в. Из построенных эпюр видно, что максимальный изгибающий момент равен $|M|_{\max} = 186,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и действует в сечении приложения внешнего момента.

3. Из условия прочности по нормальным напряжениям подбираем сечение:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{186,25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1164 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 1164 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239-89 ближайший номер двутавра № 45 с $W_x = 1231 \text{ см}^3$, $J_x = 27696 \text{ см}^4$.

4. Для балки с принятыми размерами определим перемещения сечений по универсальному уравнению изогнутой оси линии. Выберем начало координат в левом крайнем сечении (точка приложения силы F) и запишем универсальные уравнения для последнего участка:

$$EJ_{x,y} = EJ_x \cdot y_0 + EJ_x \cdot \varphi_0 \cdot z + \frac{M \cdot (z - 4)^2}{2} + \frac{F \cdot z^3}{6} + \frac{R_A \cdot (z - 1)^3}{6} + \frac{R_B \cdot (z - 9)^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot (z - 5)^4}{24} \quad (3)$$

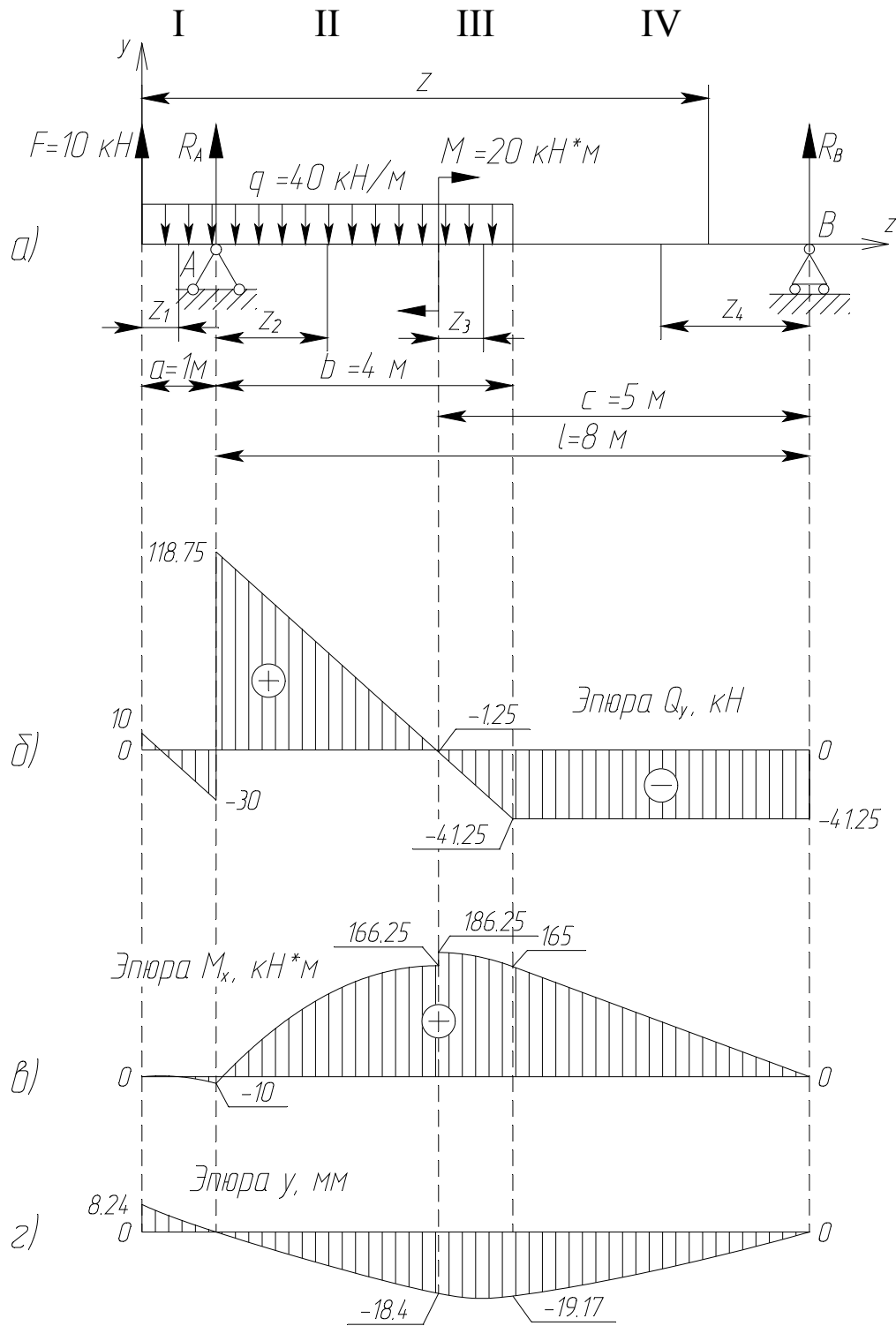


Рис. 8.2. Эпюры Q_y , M_x , y .

В этом уравнении два неизвестных постоянных интегрирования y_0 и φ_0 . Значения этих неизвестных найдем из начальных параметров: при $z=a=1\text{ м}$ $y=0$, и при $z=a+l=9\text{ м}$ $y=0$. Тогда:

$$0 = EJ_x \cdot y_0 + EJ_x \cdot \varphi_0 \cdot 1 + \frac{F \cdot 1^3}{6} - \frac{q \cdot 1^4}{24}; \quad (4)$$

$$0 = EJ_x \cdot y_0 + EJ_x \cdot \varphi_0 \cdot 9 + \frac{M \cdot (9-4)^2}{2} + \frac{F \cdot 9^3}{6} + \frac{R_A \cdot (9-1)^3}{6} - \frac{q \cdot 9^4}{24} + \frac{q \cdot (9-5)^4}{24}. \quad (5)$$

Решая совместно уравнения (4) и (5), находим значения $EJ_x \cdot y_0$ и $EJ_x \cdot \varphi_0$:

$$EJ_x \cdot y_0 + EJ_x \cdot \varphi_0 \cdot 1 = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{6} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1^4}{24} = 0;$$

$$EJ_x \cdot y_0 + EJ_x \cdot \varphi_0 \cdot 9 = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 9^3}{6} - \frac{148,75 \cdot 10^3 \cdot 8^3}{6} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 9^4}{24} - \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4^4}{24} = -3650 \cdot 10^3$$

Решаем систему уравнений где $x = EI_x \cdot y_0$; $y = EI_x \cdot \varphi_0$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 9y = -3650 \cdot 10^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 8y = -3650 \cdot 10^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 456,25 \cdot 10^3 \\ y = -456,25 \cdot 10^3 \end{cases}$$

$$EI_x \cdot y_0 = x = 456,25 \cdot 10^3;$$

$$EJ_x \cdot \varphi_0 = y = -456,25 \cdot 10^3$$

Окончательно общее уравнение примет следующий вид:

$$EJ_x y = 456250 - 456250 \cdot z + \frac{M \cdot (z-4)^2}{2} + \frac{F \cdot z^3}{6} + \frac{R_A \cdot (z-1)^3}{6} + \frac{R_B \cdot (z-9)^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot (z-5)^4}{24}.$$

Подставляя соответствующие значения z , можем найти перемещение любого сечения балки. Находим перемещение сечения на левом конце балки $z=0$:

$$EJ_x y = 456250;$$

$$y = \frac{456250}{EJ_x} = \frac{456250}{2 \cdot 10^{11} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 8,24 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,24 \text{ мм}.$$

Находим перемещение сечения при $z = a + l - c = 1 + 8 - 5 = 4 \text{ м}$:

$$EJ_x y = 456250 - 456250 \cdot 4 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{6} + \frac{148,75 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{6} - \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4^4}{24} = -1019 \cdot 10^3;$$

$$y = \frac{-1019 \cdot 10^3}{EJ_x} = \frac{-1019 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = -18,40 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -18,40 \text{ мм}.$$

Находим перемещение сечения при $z = a + l - b = 1 + 8 - 4 = 5 \text{ м}$:

$$EJ_x y = 456250 - 456250 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5^3}{6} + \frac{148,75 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{6} - \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^4}{24} = -1062 \cdot 10^3;$$

$$y = \frac{-1062 \cdot 10^3}{EJ_x} = \frac{-1062 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = -19,17 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -19,17 \text{ мм}.$$

Эпюра перемещений сечений приведена на рис. 8.2, г.